Вариант ЕГЭ 2014 года с решениями.

B1.

Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 450 рублей и стоимость одного журнала - 24 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал.

Решение.

$$24\cdot25-450=600-450=150$$

Ответ: при подписке на журнал Аня потратила бы на 150 рублей меньше.

B2.

Больному прописано лекарство, которое нужно ему принимать по $0,5$ г 2 раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке 10 таблеток по $0,25$ г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

(В тексте задания ЕГЭ было написано "Какого наибольшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?", но наибольшее количество трудно указать, так как любого количества, которое больше 3 -х упаковок, хватит).

Решение.

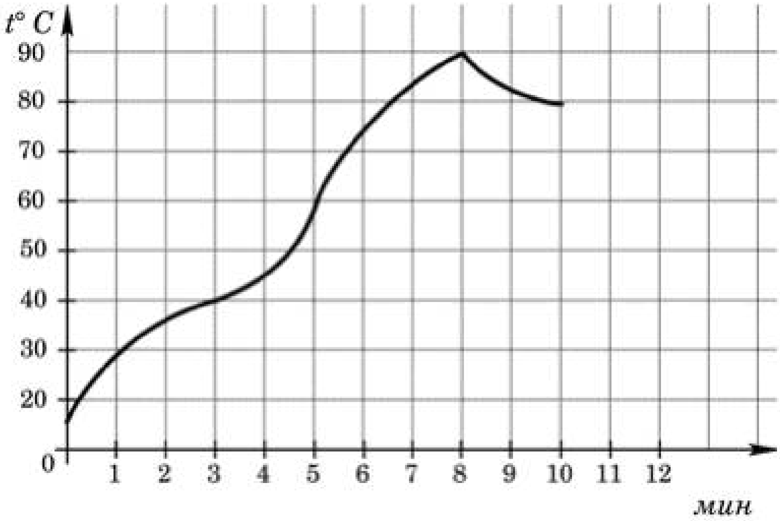
$0,5\cdot2\cdot7=7$ (г) - курс лечения

$$7\div(0,25\cdot10)=7\div2,5=2,8$$

Ответ: на весь курс лечения хватит 3 упаковки лекарства.

B3.

На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси - температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, до скольки градусов Цельсия двигатель нагрелся за первые 3 минуты с момента запуска.



Ответ: за первые 3 минуты с момента запуска двигатель нагрелся до $40°$ Цельсия.

B4.

Клиент хочет арендовать автомобиль на 2 суток для поездки протяженностью 400 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость аренды.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	5	3900
Б	Бензин	11	3100
В	Газ	15	3000

Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Цена дизельного топлива - 19 рублей за литр, бензина - 23 рубля за литр, газа - 16 рублей за литр. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Решение.

Стоимость варианта **А:** $2\cdot 3900+19\cdot 5\cdot \dfrac{400}{100}=7800+380=8180$

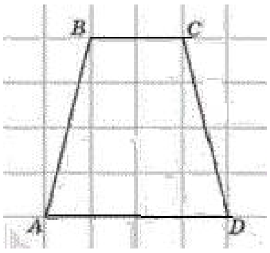
Стоимость варианта **Б:** $2\cdot 3100+23\cdot 11\cdot \dfrac{400}{100}=6200+1012=7212$

Стоимость варианта **В:** $2\cdot 3000+16\cdot 15\cdot \dfrac{400}{100}=6000+960=6960$

Ответ: наиболее дешевый вариант - вариант **В ,** клиет заплатит 6960 рублей.

B5.

На клетчатой бумаге изображена трапеция. Найти длину средней линии этой трапеции (в сантиметрах).



Ответ: средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, то есть $\frac{2+4}{2}=3$ см.

B6.

В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает?

Решение.

$$\frac{2000-6}{2000}=\frac{1994}{2000}=\frac{997}{1000}=0,997$$

Ответ: вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает равна $0,997$.

B7.

Найдите корень уравнения: $\sqrt{-32-x}=2$

Решение.

$-32-x=4$

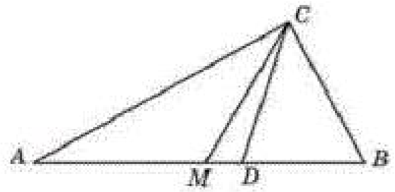
$-x=36$

$x=-36$

Ответ: -36

B8.

Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен $20°$. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника.



Решение.

Медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, поэтому делит треугольник на два равнобедренных треугольника, углы при основании которых равны между собой: $\angle A = \angle ACM$ и $\angle B = \angle BCM$

Биссектриса прямого угла делит его пополам: $\angle ACD = \angle BCD = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

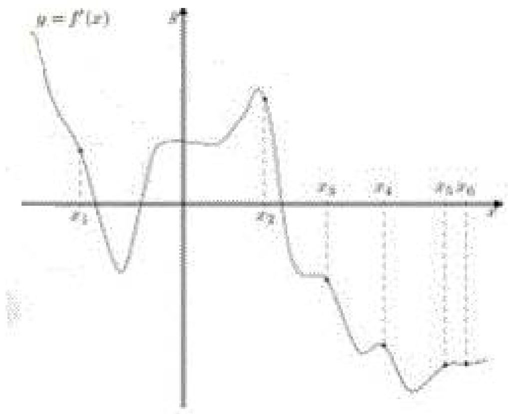
Поэтому меньший острый угол прямоугольного треугольника

$\angle A = \angle ACM = \angle ACD - \angle MCD = 45° - 20° = 25°$

Ответ: $25°$

B9.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производная функции $f(x)$, на оси абсцисс отмечены шесть точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$.



Решение.

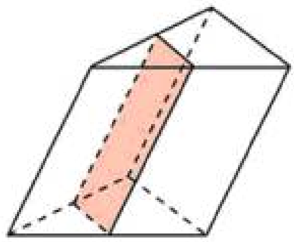
На промежутках возрастания функции $f(x)$ ее производная - положительная

Производная положительна в точках x_1 и x_2 .

Ответ: на промежутках возрастания функции $f(x)$ лежат 2 точки.

B10.

Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 52 , проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найти объем отсеченной треугольной призмы.



Решение.

Объем треугольной призмы равен $V = S_{\Delta} \cdot H$, где S_{Δ} - площадь треугольника, лежащего в основании, H - высота призмы.

$S_{\Delta} = \dfrac{a \cdot h}{2}$, где a - длина основания треугольника, h - его высота.

Средняя линия треугольника параллельна основанию и проходит через середины сторон треугольника, отсекая треугольник подобный данному с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{2}$

$S^1_{\Delta} = \dfrac{a \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{a \cdot h}{8} = \dfrac{S_{\Delta}}{4}$ - площадь основания отсеченной треугольной призмы.

$V^1 = S^1_{\Delta} \cdot H = \dfrac{S_{\Delta}}{4} \cdot H = \dfrac{52}{4} = 13$ - объем отсеченной треугольной призмы

Ответ: объем отсеченной треугольной призмы равен 13 .

B11.

Найти значение выражения: $5 \sin \dfrac{11\pi}{12} \cdot \cos \dfrac{11\pi}{12}$

Решение.

$$5 \cdot \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right) =$$

(воспользуемся формулами приведения)

$$5 \cdot \cos \frac{5\pi}{12} \cdot \left[-\sin \frac{5\pi}{12}\right] = -\frac{5}{2} \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{5}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{4} = -0,8$$

8

Ответ: $-0,8$

B12.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле: $R=r_{\text{пок}}-\dfrac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0,02K}{r_{\text{пок}}+0,1}}}$,

где $r_{\text{пок}}$ - средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ - оценка магазина экспертами (от 0 до $0,7$) и K - число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет магазина "Альфа", если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, - 26 , их средняя оценка равна $0,68$, а оценка экспертов равна $0,23$.

Решение.

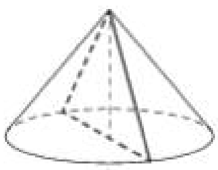
$$R_A=r_{\text{пок}}-\frac{r_{\text{пок}}-r_{\text{экс}}}{(K+1)^{\frac{0,02K}{r_{\text{пок}}+0,1}}}=0,68-\frac{0,68-0,23}{(26+1)^{\frac{0,02\cdot 26}{0,68+0,1}}}=0,68-\frac{0,45}{27^{\frac{2}{3}}}=$$

$$=0,68-\frac{0,45}{(3^3)^{\frac{2}{3}}}=0,68-\frac{0,45}{3^{3\cdot\frac{2}{3}}}=0,68-\frac{0,45}{9}=0,68-0,05=0,63$$

Ответ: $0,63$

B13.

Площадь основания конуса равна 36π , высота - 10 . Найти площадь осевого сечения этого конуса.



Решение.

Площадь основания конуса $S_o=\pi R^2$ - где R - радиус основания конуса.

$$R=\sqrt{\frac{S_0}{\pi}}$$

Площадь осевого сечения конуса находится по формуле площади треугольника

$S_c=\dfrac{D\cdot H}{2}=\dfrac{2R\cdot H}{2}=R\cdot H$, где H - высота конуса, D -диаметр основания.

Откуда $S_c=R\cdot H$ = $\sqrt{\dfrac{S_o}{\pi}}\cdot H=\sqrt{\dfrac{36\pi}{\pi}}\cdot 10=\sqrt{36}\cdot 10=60$

Ответ: 60

В14.

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй - 35% никеля. Из этих сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго сплава?

Решение.

Масса первого сплава - x, он содержит в себе никеля - $0,1x$.

Масса второго сплава - y, он содержит в себе никеля - $0,35y$.

Масса третьего раствора (суммарного) 225, он содержит в себе никеля $0,3\cdot 225$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} x+y=225 \\ 0,1x+0,35y=0,3\cdot 225 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=225-y \\ 0,1(225-y)+0,35y=67,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=225-y \\ 22,5-0,1y+0,35y=67,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=225-y \\ 0,25y=45 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=225-y \\ y=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=45 \\ y=180 \end{cases}$$

$$y-x=180-45=135$$

Ответ: масса первого сплава меньше массы второго на 135 кг.

В15.

Найти точку максимума функции $y=0,5x^2-7x+12\ln(x)+8$

Решение.

$$y'=\left(0,5x^2-7x+12\ln(x)+8\right)'=(0,5x^2)'-(7x)'+\left(12\ln(x)\right)'+(8)'=$$

$$=0,5\cdot 2x-7+12\cdot\frac{1}{x}=x-7+\frac{12}{x}=\frac{x^2-7x+12}{x}$$

Для нахождения критических точек приравняем производную к 0 и решим полученное уравнение.

$$\frac{x^2-7x+12}{x}=0 \Rightarrow x^2-7x+12=0$$

Находим дискриминант $D=(-7)^2-4\cdot 12=49-48=1$; $\sqrt{D}=1$

$x_1=\dfrac{7-1}{2}=3$ и $x_2=\dfrac{7+1}{2}=4$

Проходя через точку максимума, производная функции меняет знак с $+$ на $-$.

При $x=2$ $y' = \frac{x^2-7x+12}{x} = \frac{2^2-7\cdot 2+12}{2} = 1>0$

При $x=3,1$ $y' = \frac{x^2-7x+12}{x} = \frac{3,1^2-7\cdot 3,1+12}{3,1} = \frac{9,61-21,7+12}{3,1} < 0$

При $x=5$ $y' = \frac{x^2-7x+12}{x} = \frac{5^2-7\cdot 5+12}{5} = \frac{25-35+12}{5} > 0$

Следовательно, точка максимума функции при $x=3$

$y=0,5\cdot(3)^2-7\cdot 3+12\ln(3)+8=12\ln(3)-8,5$

Ответ: точка максимума функции при $x=3$.

С1.

а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$

б) Найдите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

Решение.

Решение может быть получено программой UMS .

а) $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0$

Воспользуемся формулами приведения.

$2\sqrt{3}\sin^2 x-\sin 2x=0$

Преобразуем уравнение.

$2\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cos x=0$

Выносим общий множитель.

$\sin x\left(2\sqrt{3}\sin x-2\cos x\right)=0$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$\sin x=0$

Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.

$x=\pi k$

Случай 2 .

$2\sqrt{3}\sin x-2\cos x=0$

Следующее уравнение равносильно предыдущему.

$$2\sqrt{3}\tan x=2$$
$$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.
$$x=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{6}+\pi k$$

б) $\left\{\begin{array}{l}\sin x=0\\ \frac{3\pi}{2}\le x\le 3\pi\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\pi k\\ \pi k\ge\frac{3\pi}{2}\\ \pi k\le 3\pi\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\pi k\\ \left[\begin{array}{l}k=2\\ k=3\end{array}\right|\end{array}\right| \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}x=2\pi\\ x=3\pi\end{array}\right|$

$$\left\{\begin{array}{l}\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{3\pi}{2}\le x\le 3\pi\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\pi k\\ \frac{\pi}{6}+\pi k\ge\frac{3\pi}{2}\\ \frac{\pi}{6}+\pi k\le 3\pi\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\pi k\\ k\ge\frac{4}{3}\\ k\le\frac{17}{6}\end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\pi k\\ k=2\end{array}\right|$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$$

Ответ: а) $x=\pi k\,;\,x=\frac{\pi}{6}+\pi k$, где $k\in Z$

б) $2\pi,\ \frac{13\pi}{6},\ 3\pi$.

С2. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3 , а ребро MA равно 6 . На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM - точка L . Известно, что $AD=AL=2$ и $BE=1$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

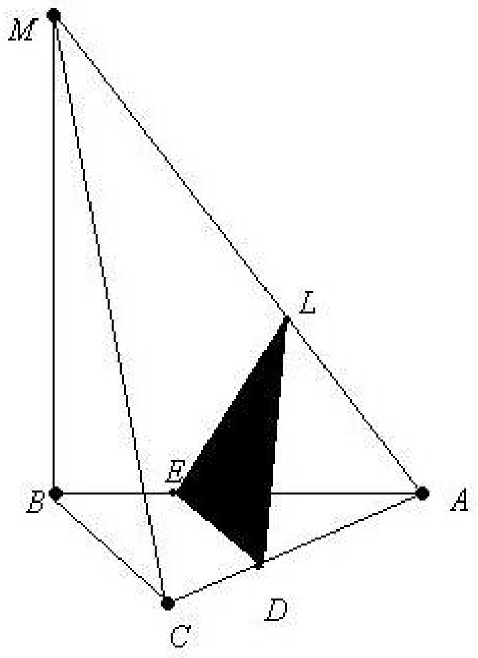
Дано: $MABC$ - пирамида; $\triangle ABC$ - основание;

$AB = AC = BC = 3$; $MA = 6$

$MB \perp (ABC)$

$AD = AL = 2$ и $BE = 1$

$S_{\triangle DEL} = ?$



Решение.

1) $AE = 3 - 1 = 2$; $\triangle MAB = \triangle MCB$ по двум катетам $\Rightarrow$ $MC = MA = 6$

2) $\triangle AED \backsim \triangle ABC$ по I - ому признаку (двум сторонам и углу между ними)

$$\Rightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow ED = 2$$

3) $\cos \angle LAD = \dfrac{1,5}{6} = 0,25$, $\cos \angle LAE = \dfrac{3}{6} = 0,5$

I способ

По теореме косинусов:

$$LD^2 = AD^2 + AL^2 - 2AD \cdot AL \cos \angle LAD = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,25 = 6 \quad \Rightarrow LD = \sqrt{6}$$

$$LE^2 = AE^2 + AL^2 - 2AE \cdot AL \cos \angle LAE = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,5 = 4 \quad \Rightarrow \quad LE = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \angle ELD = \frac{LD^2 + LE^2 - DE^2}{2 \cdot LD \cdot LE} = \frac{6 + 4 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot 2} = \frac{6}{4 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\angle ELD=\sqrt{1-(\cos\angle ELD)^2}=\sqrt{1-\frac{6}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{10}$$

$$S_{\Delta DEL}=\frac{1}{2}\cdot LD\cdot LE\cdot\sin\angle ELD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10}=\frac{\sqrt{60}}{4}=\frac{\sqrt{4\cdot 15}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

II способ

По формуле Герона

$$S_{\Delta DEL}=\sqrt{\frac{\sqrt{6}+2+2}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+4-2\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+4-2\cdot 2}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+4-2\cdot 2}{2}}=$$

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{6}+4)\cdot(4-\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}}{4}=\frac{\sqrt{(4^2-6)\cdot 6}}{4}=\frac{\sqrt{10\cdot 6}}{4}=\frac{2\sqrt{15}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $S_{\Delta DEL}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

С3. Решите систему неравенств: $\begin{cases}36^{x-2}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0\\ x\cdot\log_4(5-3x-x^2)\ge 0\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}36^{x-2}-7\cdot 6^{x-1}+1\ge 0 & (1)\\ x\cdot\log_4(5-3x-x^2)\ge 0 & (2)\end{cases}$$

1) $x\cdot\log_4(5-3x-x^2)\ge 0\quad\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}5-3x-x^2>0\\ x\log_4(5-3x-x^2)\ge 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5-3x-x^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_4(5-3x-x^2)\ \ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_4(5-3x-x^2)\ \le 0 \\ x\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

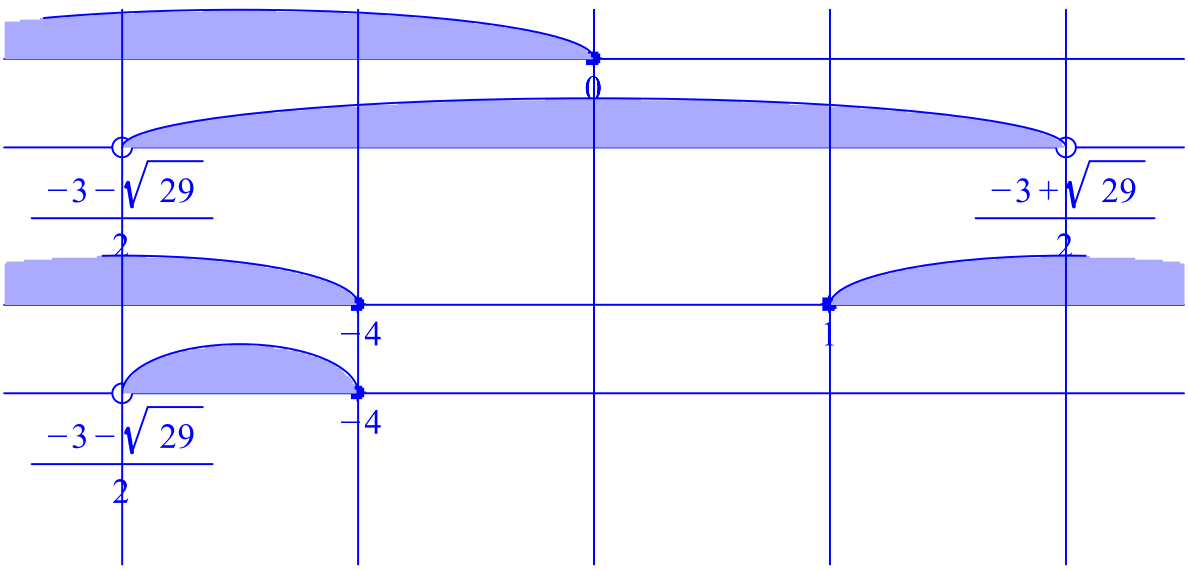
Случай 1 .

$$\begin{cases} 5-3x-x^2>0 \\ \log_4(5-3x-x^2)\ \ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x-x^2>0 \\ 5-3x-x^2\ge 1 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5-3x-x^2\ge 1 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 1 \end{cases}$$

Случай 2 .

$$\begin{cases} 5-3x-x^2>0 \\ \log_4(5-3x-x^2)\ \le 0 \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x-x^2>0 \\ 5-3x-x^2\le 1 \\ x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ x^2+3x-5<0 \\ x^2+3x-4\ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x>\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2} \\ x\le -4 \end{cases}$$

Ответ неравенства (2) : $0 \le x \le 1$ или $\frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x \le -4$

Теперь можно решить неравенство (1) и пересечь множество решений обоих неравенств.

Но можно решение упростить.

Заметим, что если $0 \le x \le 1$, то

$36^{x-2} \le 36^{-1} \le \frac{1}{36}$, а $7 \cdot 6^{x-1} > \frac{7}{6}$. Поэтому $36^{x-2} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 < \frac{1}{36} - \frac{7}{6} + 1 < 0$

То есть ни одно число из промежутка $0 \le x \le 1$ не является решением неравенства (1).

Заметим также, что при $\frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x \le -4$ имеет место $x \le -4$ и поэтому

$6^{x-1} \le 6^{-5} < \frac{1}{36}$, а, значит, $36^{x-2} - 7 \cdot 6^{x-1} + 1 \ge 0$.

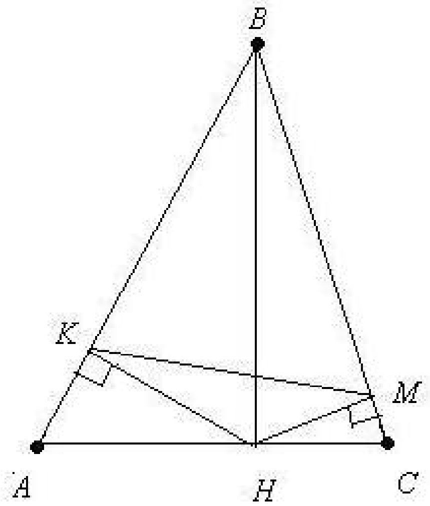
То есть, любое число из промежутка $\frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x \le -4$ является решением неравенства (1)

Ответ всей системы неравенств: $\frac{-3-\sqrt{29}}{2} < x \le -4$

С4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что $\triangle MBK$ подобен $\triangle ABC$.

б) Найдите отношение площади $\triangle MBK$ и площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен 4 .



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный;

$BH \perp C$; $HK \perp AB$; $HM \perp BC$;

$BH = 2$;

$R=4$ - радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

а) $\triangle MBK \backsim \triangle ABC$; **б)** $\dfrac{S_{\triangle MBK}}{S_{AKMC}}=?$

Решение.

а)

1. В четырехугольнике $HKBM$ сумма двух углов при вершинах K и M равна $180°$. Заключаем, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность. Обозначим ее $\text{окр}1$.

2. $\angle MKH=\angle HBC$, так как эти углы в окружности $\text{окр}1$ являются вписанными и опираются на одну дугу.

3. $\angle AKM+\angle C=90°+\angle MKH+\angle C=90°+\angle HBC+\angle C=180°$ - как сумма углов в $\triangle HBC$.

Заключаем , что вокруг четырехугольника $AKMC$ можно описать окружность. Обозначим ее $\text{окр}2$ $\Rightarrow$

4. $\angle A+\angle KMC=180°$ **-** если вокруг четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$.

5. $\angle BMK+\angle KMC=180°$ - как сумма смежных углов.

6. из (**4**) и (**5**) следует, что $\angle A=\angle BMK$.

7. $\triangle MBK$ подобен $\triangle ABC$ по двум углам. Пункт (**а**) доказан.

б)

Отношение радиусов описанных окружностей подобных треуольников равно коэффициенту подобия. Поскольку, согласно (**а**), $\triangle MBK$ подобен $\triangle ABC$, то коэффициент подобия $k=\dfrac{r}{R}$, где r - радиус окружности $\text{окр}1$, R - радиус окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$. В окружности $\text{окр}1$ отрезок BH - диаметр, так как на него опирается прямой угол. Поэтому $r=\dfrac{BH}{2}=\dfrac{4}{2}=2$. По условию $R=4$, откуда $k=\dfrac{2}{4}=0,5$.

Пусть площадь $S_{\triangle ABC}=S$, тогда $S_{\triangle MBK}=k^2S=0,25\cdot S$ (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия), $S_{AKMC}=S-0,25\cdot S=0,75\cdot S$.

$S_{\triangle MBK}\div S_{AKMC}=0,25S\div 0,75S=1\div 3$

Ответ: $S_{\triangle MBK} \div S_{AKMC} = 1 \div 3$

C5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(|x+2|+|x-a|\right)^2 - 5\left(|x+2|+|x-a|\right) + 3a(5-3a) = 0$ имеет ровно два решения.

Решение.

Сделаем замену переменных: $z = |x+2| + |x-a|$

Получим уравнение: $z^2 - 5z + 3a(5-3a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = 3a \\ z = 5-3a \end{array}\right.$ (можно воспользоваться теоремой Виета, чтобы найти корни квадратного уравнения).

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} |x+2| + |x-a| = 3a & (1) \\ |x+2| + |x-a| = 5-3a & (2) \end{array}\right.$$

1. Решим уравнение $|x+2| + |x-a| = 3a$ (стандартным образом путем раскрытия модулей).

x	a	Ограничения для переменных
$2a-1$		$a \geq 1$
$-a-1$		$a > 1$
любое допустимое	1	$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \end{cases}$

2. Решим уравнение $|x+2|+|x-a|=5-3a$ (стандартным образом путем раскрытия модулей).

x	a	Ограничения для переменных
$-\frac{2a-3}{2}$		$a\le\frac{3}{4}$
$\frac{4a-7}{2}$		$a<\frac{3}{4}$
любое допустимое	$\frac{3}{4}$	$\begin{cases} x\ge-2 \\ x<\frac{3}{4} \end{cases}$

Если вы испытываете затруднения в решении уравнениий с модулями, то воспользуйтесь программой *UMS* (umsolver.com)

Числа $a=\frac{3}{4}$ и $a=1$ разбивают числовую ось на части.

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1 $a<\frac{3}{4}$.

В этом случае, как показывает таблицы, уравнение (1) имеет ровно **2** решения и уравнение (2) имеет тоже ровно **2** решения.

Поскольку при $a<\frac{3}{4}$ выполнено $3a\neq 5-3a$ (равенство $3a=5-3a$ выполняется при $a=\frac{5}{6}$), то множества решений уравнений (1) и (2) не пересекаются.

Вывод: в рассматриваемом **случае 1** исходное уравнение имеет ровно **4** различных решения.

Случай 2 $\frac{3}{4}<a<1$.

В этом случае, как показывает таблицы, уравнение (1) не имеет решений и уравнение (2) не имеет решений.

Вывод: в рассматриваемом **случае 2** исходное уравнение **не имеет решений**.

Случай 3 $a>1$.

В этом случае, как показывает таблицы, уравнение (1) имеет ровно **2** решения и уравнение (2) не имеет решений.

Вывод: в рассматриваемом **случае 3** исходное уравнение имеет ровно **2** решения.

Случай 4 $a=\frac{3}{4}$ или $a=1$.

В этом случае, как показывает таблица, уравнение (1) или уравнение (2) имеет бесконечное множество решений.

Вывод: в рассматриваемом **случае 4** исходное уравнение имеет **бесконечное множество решений**.

Ответ: исходное уравнение имеет ровно два решения при $a>1$.

С6. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста - доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа $9,3$, $10,5$ и $12,7$ округляются до 9 , 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38 ?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковые.

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5 . Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Решение.

а) Обозначим число прогосовавших за некоторого футболиста через x **.**

Имеем по условию $0,375\le\frac{x}{11}<0,385 \quad\Leftrightarrow\quad 4,125\le x<4,235$ Нет натуральных решений!

б) Обозначим число проголосовавших за футболистов **1**, **2**, **3** соответственно через $x,\ y,\ z$; число проголосовавших - через m , а рейтинги футболистов **1**, **2** и **3** равны $n\%$.

Пусть для определенности $x<y<z$. Тогда имеем :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n}{100}-0,005\le\dfrac{x}{m}<\dfrac{n}{100}+0,005\\ \dfrac{n}{100}-0,005\le\dfrac{y}{m}<\dfrac{n}{100}+0,005\\ \dfrac{n}{100}-0,005\le\dfrac{z}{m}<\dfrac{n}{100}+0,005\\ x+y+z=m\\ x<y<z\end{array}\right. \Rightarrow \quad \dfrac{3n}{100}-0,015\le 1<\dfrac{3n}{100}+0,015$$

$$\Leftrightarrow \quad 32\frac{5}{6}\le n<33\frac{5}{6} \quad \Leftrightarrow \quad n=33$$

Получаем (*) $\left\{\begin{array}{l}0,33-0,005\le\dfrac{x}{m}<0,33+0,005\\ 0,33-0,005\le\dfrac{y}{m}<0,33+0,005\\ 0,33-0,005\le\dfrac{z}{m}<0,33+0,005\\ x+y+z=m\\ x<y<z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}0,325m\le x<0,335m\\ 0,325m\le y<0,335m\\ 0,325m\le z<0,335m\\ x+y+z=m\\ x<y<z\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad 0,975m\le x+y+z<1,005m$$

Если m будет кратно 10000, то, например, $x=0,3331m$, $y=0,3332m$, $z=0,3337m$ удовлетворяют системе (*) и рейтинги всех трех футболистов равны 33%

Вывод: ситуация, описанная в пункте (**б**) возможна.

в) Обозначим число проголосовавших за футболиста **5** до голосования Васи через x; число проголосовавших (без Васи) m, а рейтинг футболиста **5** - через $n\%$.

Имеем:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n}{100}-0,005\le\dfrac{x}{m}<\dfrac{n}{100}+0,005\\ \dfrac{n}{100}-0,005\le\dfrac{x+1}{m+1}<\dfrac{n}{100}+0,005\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}10mn-5m\le 1000x<10mn+5m\\ 10(m+1)n-5(m+1)\le 1000x-1000\le 10(m+1)n+5(m+1)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}10mn-5m\le 1000x<10mn+5m\\ 10(m+1)n-5m+995\le 1000x<10(m+1)n+5m+1005\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$10(m+1)n-5m+995<10mn+5m \quad \Rightarrow \quad m>n+99,5 \quad \Rightarrow \quad m\ge 100$$

Покажем, что для $m = 100$ такое голосование возможно.

Пусть $x = 50$.

Тогда рейтинг футболиста **5** до голосования Васи: $\frac{50}{100} = 0,5 = 50\%$

После голосования Васи: $\frac{51}{101} < 0,501$, ($\frac{51}{101} \approx 0,5049505$) то есть, те же 50% .

Ответ: а) нет; **б)** да; **в)** 101 (включая Васин голос)