В3 (2011) $\sqrt{60-3x}=6$

Ниже приведено решение уравнения программой UMS online 10.0 (www.umsolver.com)

Отметим ОДЗ.

$$\begin{cases} 60-3x\geq 0 \\ \sqrt{60-3x}=6 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство.

$$\begin{cases} x\leq 20 \\ \sqrt{60-3x}=6 \end{cases}$$

Воспользуемся свойством радикалов. Решаем уравнение.

$$60-3x=6^2$$

$$60-3x=36$$

$$20-x=12$$

$$-x=12-20$$

$$x=8$$

$$\begin{cases} x\leq 20 \\ x=8 \end{cases}$$

Следующее уравнение эквивалентно предыдущей системе.

$$x=8$$

Окончательный ответ:

x
8

В7 $\sin A=\sqrt{\dfrac{51}{100}}$, $0<A<\dfrac{\pi}{2}$

Найти $\cos A$.

Решение получено с помощью UMS online 10.0

Решение .

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{51}{100}}\right)^2}=0.7$$

так как $\begin{cases} 0<A<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos A>0 \end{cases}$

B11 Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+7x^2+8x-8$ на отрезке $[-6;-3]$

Ниже приведено решение задания программой UMS online 10.0 (www.umsolver.com)

Исследуем функцию, заданную формулой: $y(x)=x^3+7x^2+8x-8$

Область определения: $-6\le x\le -3$

Первая производная: $y'(x)=3x^2+14x+8$

$(x^3+7x^2+8x-8)'=$

$=(x^3)'+(7x^2)'+(8x)'-(8)'=$

$=3x^2+14x+8$

Критические точки: $x=-4$

Для нахождения критических точек приравняем первую производную к нулю и решим полученное уравнение.

$3x^2+14x+8=0$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=14^2-4\cdot3\cdot8=100$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-14-10}{2\cdot3}=-4\ ;\ x_2=\frac{-14+10}{2\cdot3}=-\frac{2}{3}$$

$-\frac{2}{3}$ не входит в ОДЗ функции.

Ответ: $x=-4$

Результаты исследования функции занесем в таблицу.

Тестовые интервалы:	$y(x)$	$y'(x)$	характер графика
$x=-6$	-20	+	
$-6<x<-4$		+	возрастает
$x=-4$	8	0	относительный максимум
$-4<x<-3$		-	убывает
$x=-3$	4	-	

Множество значений функции: $-20\le y\le 8$

Наименьшее значение: $y=-20$

Наибольшее значение: $y=8$

С1 (2011) $(10\cos^2 x-7\cos x-6)\log_8(-\sin x)=0$

Ниже приведено полное решение, полученное программой UMS online 10.0 (www.umsolver.com)

Отметим ОДЗ.

$$\begin{cases}\sin x<0\\(10\cos^2 x-7\cos x-6)\log_8(-\sin x)=0\end{cases}$$

Преобразуем уравнение.

$$\begin{cases}\sin x<0\\\left[\begin{array}{l}10\cos^2 x-7\cos x-6=0\\\log_8(-\sin x)=0\end{array}\right.\end{cases}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$\begin{cases}\sin x<0\\10\cos^2 x-7\cos x-6=0\end{cases}$$

Произведем замену переменных.

$$\begin{cases}a=\cos x\\\sin x<0\\10a^2-7a-6=0\end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot10(-6)=289$$

$$a_1=\frac{7-17}{2\cdot10}=-\frac{1}{2}\quad;\quad a_2=\frac{7+17}{2\cdot10}=\frac{6}{5}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.1 .

$$\begin{cases}a=\cos x\\\sin x<0\\a=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Произведем замену переменных.

$$\begin{cases}\sin x<0\\\cos x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \\ x = -\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай $1.1.1$.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x < 0 \\ x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x < 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Подставим вместо переменной x найденное выражение.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) < 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Воспользуемся формулами приведения.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

нет решений

Случай $1.1.2$.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x < 0 \\ x = -\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x < 0 \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Подставим вместо переменной x найденное выражение.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)<0 \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right.$$

Воспользуемся формулами приведения.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)<0 \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{3}}{2}<0 \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right.$$

Следующее уравнение эквивалентно предыдущей системе.

$$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$$

Случай 1.2 .

$$\left\{\begin{array}{l} a=\cos x \\ \sin x<0 \\ a=\frac{6}{5} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x<0 \\ \cos x=\frac{6}{5} \end{array}\right.$$

нет решений

Случай 2 .

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x<0 \\ \log_8(-\sin x)=0 \end{array}\right.$$

Преобразуем уравнение.

$$\log_8(-\sin x)=\log_8(1)$$

Следующее уравнение эквивалентно предыдущей системе.

$$\sin x=-1$$

Воспользуемся формулой для решения простейших тригонометрических уравнений.

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

Окончательный ответ:

x
$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$
$-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

С3 (2011) $\dfrac{2\log_2(x^2+2x)}{\log_2(x^2)}\le 1$

Ниже приведено полное решение, полученное программой UMS onlin 10.0 (www.umsolver.com)

Отметим ОДЗ.

$$\begin{cases} x\ne 0 \\ x^2+2x>0 \\ \log_2(x^2)\ne 0 \\ \dfrac{2\log_2(x^2+2x)}{\log_2(x^2)}\le 1 \end{cases}$$

Преобразуем неравенство.

$$\frac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(x^2)}\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{\log_2(x^2+2x)}{2\log_2(|x|)}\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(|x|)}\le 1$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + 2x > 0 \\ \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \\ \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(|x|)} \leq 1 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(|x|)} \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(|x|)} \leq 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(-x)} \leq 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Перенесем все в левую часть. Приводим дроби к общему знаменателю.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x) - \log_2(-x)}{\log_2(-x)} \leq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(-x)\ge 0\\ \log_2(-x)<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(-x)\le 0\\ \log_2(-x)>0\end{array}\right.\end{array}\right.\\ x<-2\end{array}\right.$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.1 .

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(-x)\ge 0\\ \log_2(-x)<0\\ x<-2\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство.

$$\log_2(-x)<0$$

так как $x<-2$

Левая часть принимает только положительные значения.

нет решений

Случай 1.2 .

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(-x)\le 0\\ \log_2(-x)>0\\ x<-2\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство.

$$\log_2(-x)>0$$

так как $x<-2$

Левая часть принимает только положительные значения.

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(-x)\le 0\\ x<-2\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство. Воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

$$x^2+2x\le -x$$

$$x^2+3x\le 0$$

$$x(x+3)\le 0$$

$$-3\le x\le 0$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x \ge -3 \\ x < -2 \end{cases}$$

Итак,ответ этого случая:

x	Ограничения для переменных
любое допустимое	$\begin{cases} x \ge -3 \\ x < -2 \end{cases}$

Случай 2 .

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(|x|)} \le 1 \\ x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(x)} \le 1 \\ x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Перенесем все в левую часть. Приводим дроби к общему знаменателю.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x) - \log_2(x)}{\log_2(x)} \le 0 \\ x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\geq 0\\ \log_2(x)<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\leq 0\\ \log_2(x)>0\end{array}\right.\end{array}\right.\\ x>0\\ x<1\end{array}\right.$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 2.1 .

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\geq 0\\ \log_2(x)<0\\ x>0\\ x<1\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство.

$$\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\geq 0$$

так как $\left\{\begin{array}{l}0<x<1\\ \log_2(x)<0\end{array}\right.$

Левая часть принимает только положительные значения.

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x)<0\\ x>0\\ x<1\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство. Воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

$$\log_2(x)>0$$

$$\log_2(x)<\log_2(1)$$

$$x<1$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}x<1\\ x>0\end{array}\right.$$

Итак,ответ этого случая:

x	Ограничения для переменных
любое допустимое	$\left\{\begin{array}{l}x<1\\ x>0\end{array}\right.$

Случай 2.2 .

$$\begin{cases} \log_2(x^2+2x) - \log_2(x) \le 0 \\ \log_2(x) > 0 \\ x>0 \\ x<1 \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство. Воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

$$\log_2(x) > 0$$

$$\log_2(x) > \log_2(1)$$

$$x>1$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x>1 \\ x<1 \\ x>0 \end{cases}$$

нет решений

Случай 3 .

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(|x|)} \le 1 \\ x>1 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2(x)} \le 1 \\ x>1 \end{cases}$$

Перенесем все в левую часть. Приводим дроби к общему знаменателю.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x^2+2x) - \log_2(x)}{\log_2(x)} \le 0 \\ x>1 \end{cases}$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\ge 0\\ \log_2(x)<0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\le 0\\ \log_2(x)>0\end{array}\right.\end{array}\right.\\ x>1\end{array}\right.$$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 3.1 .

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\ge 0\\ \log_2(x)<0\\ x>1\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство.

$$\log_2(x)<0$$

так как $x>1$

Левая часть принимает только положительные значения.

нет решений

Случай 3.2 .

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\le 0\\ \log_2(x)>0\\ x>1\end{array}\right.$$

Преобразуем неравенство.

$$\log_2(x)>0$$

так как $1<x$

Левая часть принимает только положительные значения.

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2(x^2+2x)-\log_2(x)\le 0\\ x>1\end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство. Воспользуемся свойством монотонности логарифмической функции.

$$\log_2(x^2+2x)\le\log_2(x)$$

$$x^2+2x\le x$$

$$x(x+1)\le 0$$

$$-1\le x\le 0$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ x > 1 \end{cases}$$ нет решений

x	Ограничения для переменных
любое допустимое	$\begin{cases} x \ge -3 \\ x < -2 \end{cases}$
любое допустимое	$\begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$

C5 (2011) $$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 16 \\ y = \lvert x-a \rvert + 1 \end{cases}$$

При каких значениях параметра a эта система имеет ровно три решения

Полное решение , полученное при помощи программы UMS online:

x	y	a	Ограничения для переменных
$3-2\sqrt{2}$	$5+2\sqrt{2}$	$-1-4\sqrt{2}$	
$3+2\sqrt{2}$	$5-2\sqrt{2}$	$-1+4\sqrt{2}$	
$3-2\sqrt{2}$	$5-2\sqrt{2}$	$7-4\sqrt{2}$	
$3+2\sqrt{2}$	$5+2\sqrt{2}$	$7+4\sqrt{2}$	
$\dfrac{2a+14-\sqrt{-4a^2-8a+124}}{4}$	$-a+\dfrac{2a+14-\sqrt{-4a^2-8a+124}}{4}+1$		$\begin{cases} a > -1-4\sqrt{2} \\ a < -1+4\sqrt{2} \end{cases}$
$\dfrac{2a+14+\sqrt{-4a^2-8a+124}}{4}$	$-a+\dfrac{2a+14+\sqrt{-4a^2-8a+124}}{4}+1$		$\begin{cases} a < -1+4\sqrt{2} \\ a > -1-4\sqrt{2} \end{cases}$
$\dfrac{2a-2-\sqrt{-4a^2+56a-68}}{4}$	$a-\dfrac{2a-2-\sqrt{-4a^2+56a-68}}{4}+1$		$\begin{cases} a > 7-4\sqrt{2} \\ a < 7+4\sqrt{2} \end{cases}$
$\dfrac{2a-2+\sqrt{-4a^2+56a-68}}{4}$	$a-\dfrac{2a-2+\sqrt{-4a^2+56a-68}}{4}+1$		$\begin{cases} a > 7-4\sqrt{2} \\ a < 3 \end{cases}$
$\dfrac{2a-2+\sqrt{-4a^2+56a-68}}{4}$	$a-\dfrac{2a-2+\sqrt{-4a^2+56a-68}}{4}+1$		$\begin{cases} a > 3 \\ a < 7+4\sqrt{2} \end{cases}$

Таблица показывает:

1) при $a=-1-4\sqrt{2}$ и при $a=7+4\sqrt{2}$ система имеет единственное решение;

2) при $a=7-4\sqrt{2}$, при $a=3$ и при $a=-1+4\sqrt{2}$ система имеет ровно три решения;

3) при $a\notin[-1-4\sqrt{2};7+4\sqrt{2}]$ система решений не имеет.

4) при остальных значениях a система имеет четное число решений (2 или 4)

Окончательный ответ: система имеет ровно три решения при

$a=7-4\sqrt{2}$, или $a=3$, или $a=-1+4\sqrt{2}$

Можно решить задание С5 (2011) графическим способом.

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-5)^2=16\\ y=|x-a|+1\end{cases}$$

Первое уравнение системы представляет собой уравнение окружности с центром в точке с координатами $(3,5)$ радиуса 4.

Второе уравнение системы - "галочка" - два луча, симметрично расположенные (под углом в $45°$) относительно прямой $x=a$, параллельной оси y, выходящие из точки (вершины) с координатами $(a,1)$. Система имеет три решения при условии, что графики, описываемые первым и вторым уравнением системы имеют три общие точки. Это возможно в трех случаях:

1) Вершина "галочки" лежит на окружности и два ее луча - секущие этой окружности.
2) Вершина "галочки" не лежит на окружности левый луч - касательная к окружности, правый луч - секущая кружности.
3) Вершина "галочки" не лежит на окружности правый луч - касательная к окружности, левый луч - секущая окружности.

1) Рассмотрим первый случай.
Вершина является точкой окружности, следовательно

$$(a-3)^2+(1-5)^2=4^2 \quad\Leftrightarrow\quad (a-3)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=3$$

2) Рассмотрим второй случай. Левый луч "галочки" - касательная к окружности в некоторой точке $M(x,y)$

Нетрудно видеть, что в этом случае $x=3-2\sqrt{2}$ и $y=5-2\sqrt{2}$

Координаты точки M удовлетворяют уравнению "галочки" $y=|x-a|+1$.

В рассматриваемом случае $x<a$. Поэтому $y=-(x-a)+1$, откуда

$$a=y+x-1=5-2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-1=7-4\sqrt{2}$$

3. Третий возможный случай рассматривается аналогично и приводит к следующему ответу:

$$a=x-y+1=3+2\sqrt{2}-(5-2\sqrt{2})+1=-1+4\sqrt{2}$$

Проверкой убеждаемся, что все три найденные значения a удовлетворяют условию задачи. Эту проверку можно сделать при помощи программы UMS.